642. 一階常微分方程式ノ特異點ニ就イテ, XIII

福原　満洲雄（九大）

1. 今後必要ナ事柄ヲ繰返シテ述ベテ置ク。

(1) $$x\frac{dy}{dx}=y\sum_{j,k}a_{jk}x^j y^k$$

$$(a_{00}=\cdots\cdots=a_{0,n-1}=0,\ a_{0n}\neq 0)$$

ノ形式的ノ解ヲ求メル為メ

(2) $$y=z\sum_{j,k}p_{jk}x^j z^k \qquad (p_{00}=1)$$

ト置キ，p_{jk} ヲ適當ニキメレバ z ニ關スル方程式ハ

(3) $$x\frac{dz}{dx}=az^{n+1}+a'z^{2n+1}$$

トナル、依ッテ (3)、一般解ヲ (2) ニ入レルコトニヨリ (1) ノ形式的ノ解ヲ得ル。(3) ノ一般解ハ $a'\neq 0$ ナラバ

(4) $$z=\left(\frac{a'}{a}\alpha\left(-\frac{na^2}{a'}(\log x+C)\right)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

ト書ケル。コヽニ $w=\alpha(\tau)$ ハ $w(0)=0$ ヲ満足スル。

$$\text{(5)}\quad \frac{dw}{d\tau} = 1 + w^{-1}$$

ノ解デアッテ，τ^{-1}, $\tau^{-1}\log\tau$ ガ十分ニ小サイ時

$$\text{(6)}\quad \alpha(\tau) = \tau\left(1 + \tau^{-1}\log\tau + \cdots\cdots\right)$$

ナル形ニ τ^{-1}, $\tau^{-1}\log\tau$ ノ收斂ナ冪級數ニ展開サレル。

(4) ノ右辺ハ $\alpha(\tau)$ ガ既ニ多價函數デアル上ニ $\log x$ ガハイッテ居テ煩ヘシイカラ $t = \log x$ ヲ変数ニトルコトトスル。(1) ハ

$$\text{(1')}\quad \frac{dy}{dt} = y\sum_{j,k} e^{jt} y^{k}$$

トナリ，コノ形式的ノ解ハ

$$\text{(2')}\quad y = z\sum_{j,k} p_{jk} e^{jt} z^{k}$$

$$\text{(4')}\quad z = \left(\frac{a'}{a}\,\alpha\left(-\frac{na^2}{a'}(t+C)\right)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

ニ依ッテ與ヘラレル。

$$\text{(7)}\quad \tau = -\frac{na^2}{a'}(t+C)$$

ト置クコトニスレバ展開式 (6) ハ $(t+C)^{-1}$, $(t+C)^{-1}\log(t+C)$ ノ十分ニ小サイ時ニ使ヘル。

2. 問題ハ (1) ノ一般解ガ漸近的ニ (2) ナル形ニ展開サレルコトヲ示スニアルガ，ソノ意味ヲ明確ニシナケレバナラナイ，勝手ナ但シキマッタ C ノ値ニ對シテ或ル條件（コレガドンナモノデアルカハ問題ヲ解イテ行ケバ自然ニ分ッテ來

ル）ヲ満足スル (1) ノ解ガ唯一ツ存在スル。（勿論ソレヲ証明スルニハ存在定理及ビ單独條件ヲ使フノデアル）、ソレヲ $y=\Phi(t, C)$ ト書クコトニシヨウ。z ハ $t+C$ ト(4')ニ依ッテ結バレテヰルカラ t, C ノ函数 $y=\Phi(t,C)$ ヲ t, z ノ函数ト考ヘルコトモ出来ル。依ッテ (1) ノ一般解ハ $y=\varphi(t,z)$ ト表ハスコトガ出来ル。此ノママニ定義サレタ t, z ノ函数 $\varphi(t,z)$ ガ (2) ナル形ニ漸近的ニ展開サレルノデアル。ソレデアルカラ e^t, z ガ（或ル條件ニ従ッテ）0 ニ近ヅクトキ勝手ナ正ノ整数 N ニ對シテ

$$(8)\quad \varphi(t,z)-z\sum_{j,k}p_{jk}e^{jt}z^k=z\,O\left(|e^{Nt}|+|z|^N\right)$$

トナルコトヲ証明スルノデアル。但シ $\sum_{j,k}^{N-1}$ ハ $j+k\leqq N-1$ デアルヤウナ (j,k) ニ関スル和ヲ表ハス、尤モコノ右辺ハ $M, M'(\leqq N)$ ガ N ト共ニ限リナク増加スル数ナラバ

$$z\,O\left(|e^{Mt}|+|z|^{M'}\right)$$

デ置換ヘテモヨイ。N ハ勝手ナ正ノ整数デアルカラ結局同ジコトニナル、ソレデアルカラ証明ヲ行フニ當ッテハ計算ガ都合ヨク運ブヤウニ M, M' ヲ取ルノデアル。

3. 級数 (2) ハ一般ニ収斂デハナイカラ e^t, z ガ勝手ナ路ニ沿ッテ 0 ニ近ヅイタノデハ (8) ヲ得ルトハ限ラナイ。(8) ガ成立スルタメニハ e^t, z ハ或ル條件ニ従ッテ 0 ニ近ヅクノデナケレバナラナイ。此ノ條件ガドンナモノデアル

カハ問題ヲ解イテ行ケバ自然ニ明ラカトナッテ来ルワケデアルガ、コレヲ詳シク論ジテ置ケバ(1)ノ右辺ガ(0,0)ヲ正則ナ場合(即チ(1)ノ右辺ガ収斂級数ノ場合、簡単ニ(1)ノ右辺ヲ級数デ書イテ了ッタガ，嚴密ニ云フナラバ(1)ノ右辺ヲ $y f(x,y)$ ト書キ，$f(x,y)$ ガ漸近的ニ $\sum a_{jk} x^j y^k$ ナル形ニ展開サレルト言フベキデアッタ）ニハ $g(t,z)$ ヲ e^t ノ冪デ整頓スルト収斂ニナル。ソレカラ $x=0$ ガ(1)ノ解ノ通常超越点ナルコトガ分ルノデアル。

4. (8)ヲ得ルタメ e^t, z ガ 0 ニ近ヅクトキ従フベキ條件ハ暫ク措イテ，キマッタ C ノ値ニ對シテ(1)ノ解 $y=\Phi(t,C)$ ヲキメル條件トハ何デアルカ、コレカラ片ヲツケテ行カウ.

C ニハキマッタ値ヲ與ヘ t ダケヲ変数ト考ヘル。z ハ(4')ニヨッテ定義サレル t ノ函数デアルカラ(6)ニ注意スレバ

$$\lim_{t\to\infty} z t^{\frac{1}{n}} = (-na)^{-\frac{1}{n}} \qquad \left(|\arg t-\pi|<\frac{\pi}{2}\right)$$

トナル、$e^t\to 0$ トナル場合ヲ考ヘテキルノデアルカラ $|\arg t-\pi|<\frac{\pi}{2}$ ナル假定ヲ設ケテモ何等差支ヘナイノデアル。ソレデアルカラ

$$(8')\qquad g(t,z) - z\sum_{jk}^{N-1} p_{jk} e^{jt} z^k = z\,O\left(|e^{Mt}|+|z|^{M'}\right)$$

((8)ノ代リニコレヲ取ッテヨイコトハ既ニ注意シタ）ガ成立スルモノトスレバ

$$\Phi(t,C)-\xi\sum_{j,k}{}^{N-1}p_{jk}e^{jt}\xi^{k}=O\left(t^{-\frac{1+M'}{n}}\right)$$

ヲ得ル。勿論 ξ ハ (4') ニ依ッテ定義サレル t ノ函數デアル、$\Phi(t,C)$ ヲキメル條件トハコレデアル。故ニ

$$u=y-\xi\sum_{j,k}{}^{N-1}p_{jk}e^{jt}\xi^{k}$$

ト置イテ u ニ關スル方程式ヲ作リ，コレニ對シテ $u=O\left(t^{-\frac{1+M'}{n}}\right)$ ヲ滿足スル解ガ唯一ツ存在スルコトヲ證明スレバヨイノデアル、併シ $\varphi(t,\xi)$ ハ ξ ヲ因子ニ含ム筈ナノデアルカラ

$$(9)\qquad y=\xi\left(\sum_{j,k}{}^{N-1}p_{jk}e^{jt}\xi^{k}+u\right)$$

ト置イタ方ガ後ノ都合ガヨイ。故ニコノ置換ニ依ッテ得ラレル u ニ關スル方程式

$$(10)\qquad \frac{du}{dt}=g(t,u,C)$$

ガ $u=O\left(t^{-\frac{M'}{u}}\right)$ ヲ滿足スル解ヲ唯一ツ持ツコトヲ證明シ，ソレニ對應スル (1) ノ解ヲ $y=\Phi(t,C)$ トスルコトニナル、コレカラ $y=\varphi(t,\xi)$ ガ定義サレル。

5. $u=O\left(t^{-\frac{M'}{n}}\right)$ ヲ滿足スル (10) ノ唯一ツノ解ガ

$$u=\frac{1}{\xi}\left\{\varphi(t,\xi)-\xi\sum_{j,k}{}^{N-1}p_{jk}e^{jt}\xi^{k}\right\}$$

ニ依ッテ與ヘラレル。ξ ハ (4') ニヨッテ與ヘラレル函數デアル、コレヲ t,C ノ函數ト考ヘテ t ニ關シテ微分出來ルコ

トハ分リ切ツテヰルガ，C ニ関シテ微分出来ルコトヲ証明スルニハ補助変数 C ヲ含ム微分方程式（10）ニ對シテ補助変数ヲ含ム微分方程式ノ解ノソノ補助変数ニ関スル微分可能性ニ関スル定理ヲ使ヘバヨイ。コノヤウニシテ $\Phi(t, C)$ ノ C ニ関スル微分可能性ヲ得ル。C ヲ複素変数ト考ヘルコトガ出来ル場合ニハ $\Phi(t, C)$ ノ C ニ関スル微分可能性ハ即チ C ニ関スル正則性ニ他ナラナイ。C ト η トノ関係ハ（4'）デアルカラ $\Phi(t, C)$ ノ C ニ関スル微分可能性カラ $\varphi(t, \eta)$ ノ η ニ関スル微分可能性ヲ得ル。C ヲ複素変数ト考ヘラレル場合ニハ η モ複素変数ト考ヘラレルカラ $\varphi(t, \eta)$ ノ η ニ関スル正則性ヲ得ル。

以上ヲ以テ微分方程式（1）ヲ研究スル方針ノ大略ヲ述ベタ積リデアル、（1）ノ右辺ニ関スル假定ガ（1）ノ解 $y = \varphi(t, \eta)$ ニ如何ニ影響スルカニツイテハ次回デ述ベルコトトシヨウ。